APÊNDICE N

TAL COMO OS PELOS, A GORDURA E A VAIDADE; AS PALAVRAS EM EXCESSO DEVEM SER SUPRIMIDAS.
JACQUES TIMMERMANS, SILVEIRAS, 18 DE JANEIRO DE 2013, 11H02MIN

NADA SEGURA A IDÉIA QUE CHEGOU AO SEU TEMPO.
VICTOR HUGO.

SILVEIRAS, TERÇA-FEIRA, 8 DE JANEIRO DE 2013 ÀS 15H 41MIN.

PARTE INTEGRANTE DA OBRA LITERÁRIA EM DESENVOLVIMENTO

TIMMERMANS, JACQUES. APOLONIUM, CAMINHOS DA LUZ. REV 1.0. SILVEIRAS, SÃO PAULO : WRÄDDER & ZÜRDDRAN, 201X.

ESPECIALMENTE

PARA

OS OLHOS & O CORAÇÃO

DO

CORPO DOCENTE

DA

E.E. PROF. HILDEBRANDO MARTINS SODERO.

Fechado em PDF

Em Silveiras, Vale Histórico, São Paulo,

segunda-feira, 16 de novembro de 2015 às 11:35

Com o objetivo de proporcionar uma base para a reflexão sobre os desafios decorrentes do processo de fatoração de uma função; vejamos o caso de $\xi(y)$ expressa por um polinômio do quarto grau dado conforme —

$$\xi(y)=\lambda\left\{y^4+py^2-ry+q\right\};\lambda,p,q,r\in\mathbb{R};y\in\mathbb{C} \qquad \textbf{[N.1]}$$

E, que também pode ser expressa sob a forma equivalente[1]—

$$\xi^*(y)=\lambda\left\{\left[y^3+\omega y^2+\left(p+\omega^2\right)y-\frac{q}{\omega}\right](y-\omega)\right\};\lambda,p,q,r\in\mathbb{R};y,\omega\in\mathbb{C} \qquad \textbf{[N.2]}$$

Onde p e q representam, respectivamente, os coeficientes dos termos em y^2 e y^0; referentes a forma polinomial expressa em **N.1;** e, ω é dado sob a forma[2] —

$$\omega=\left\langle\xi(y)\right\rangle=\left\langle\xi^*(y)\right\rangle=\left\langle y^4+py-ry+q\right\rangle \qquad \textbf{[N.3]}$$

---

[1] Deve ser compreendido que, por exemplo, se a função $\xi^*(y)$ descreve o comportamento de um fenômeno físico então no ponto em que $y=\omega$ temos —

$$\xi(\omega)=0$$

Donde, enfim, digamos que o fenômeno é cancelado! De modo é obvio que para conjuntos determinados de coeficientes, ou seja —

$$U=\{p,q,r\}$$

O polinômio do quarto grau dado por —

$$P(y)=y^4+py^2-ry+q$$

Admitirá apenas raízes complexas; donde no caso de um pesquisador investigar o tal fenômeno em que pretende encontrar a condição de cancelamento; então este cientista deve ter sempre em mente que, desde o principio, <u>deve procurar por dois parâmetros</u>, aqui denominados de ϕ e ψ ; posto que —

$$\omega=\phi+\psi i$$

E, caso ϕ e ψ forem encontrados; concluirá imediatamente que este fenômeno, também pode ser cancelado na óbvia condição $(\phi,-\psi)$; posto que —

$$\bar{\omega}=\phi-\psi i$$

Enfim, é a matemática a serviço da pesquisa física na eterna jornada para a compreensão do universo!

[2] Na descrição da relação ω ; valemo-nos de uma notação moderníssima e poderosa, donde na referência—

$$\omega=\left\langle\xi(y)\right\rangle$$

Se lê — [*ω é igual a uma raiz qualquer da função ksi de y].* E, sobre esta notação, mais adiante faremos uma descrição satisfatória com o objetivo de proporcionar ao leitor a compreensão devida; donde, neste ponto; queremos dizer apenas que ω é uma raiz do polinômio dado por —

$$P(y)=y^4+py^2-ry+q$$

Donde para permitir ao leitor uma reflexão sobre a questão notacional, apresentamos 9 formas distintas[3]; porém equivalentes, para expressar ω. Vejamos —

$$\left[\begin{array}{cc} \omega;\omega\in S=\left\{\omega \mid \left(\omega^4+p\omega^2-r\omega+q=0\right)\right\} & \langle i\rangle \\ \omega;\omega\in\left\{\omega \mid \left(\omega^4+p\omega^2-r\omega+q=0\right)\right\} & \langle ii\rangle \\ \omega;\omega\in S=\left\{\omega \mid \xi(\omega)=0\right\} & \langle iii\rangle \\ \omega;\omega\in\left\{\omega \mid \xi(\omega)=0\right\} & \langle iv\rangle \\ \omega;\omega \mid \xi(\omega)=0 & \langle v\rangle \\ \omega=\left(\left\langle \xi(y),i\right\rangle_{\mho}\right);\forall i & \langle vi\rangle \\ \omega=\left(\left\langle \xi^*(y),i\right\rangle_{\mho}\right);\forall i & \langle vii\rangle \\ \omega=\left\langle \xi(y)\right\rangle & \langle viii\rangle \\ \omega=\left\langle \xi^*(y)\right\rangle & \langle ix\rangle \end{array}\right] \quad \textbf{[N.4]}$$

[3] Donde as expressões referenciadas em $\langle vi\rangle$ e $\langle vii\rangle$ dadas por —

$$\left\langle \xi(y),i\right\rangle_{\mho} \quad \left\langle \xi^*(y),i\right\rangle_{\mho}$$

Lê-se — [A i-ésima raiz da função ($\xi(y)$ ou $\xi^*(y)$); onde ***i*** é definido pelo *critério de ordenamento (*$\mho$ ***,AGEMO)*** *das raízes de* ($\xi^*(y)$ ou $\xi^*(y)$) ; onde *[O símbolo,* $\mho$ *; resultante da inversão da vigésima quarta letra maiúscula do alfabeto grego (*Ω*,* ***OMEGA)*** recebeu o nome **AGEMO** posto é a palavra **OMEGA**, escrita ao contrário! Nada é mais justo e sugestivo do que este signo para representar o conceito de um critério de ordenamento;posto que o seu nome em si deriva de um critério de ordem da palavra OMEGA! E, diante de tudo, *este autor, propõe* duas novas notações, ainda mais compactas. Vejamos —

$$\left[\begin{array}{cc} {}_{\mho}^{i}\xi^*(y)=\left\langle \xi^*(y),i\right\rangle_{\mho} & \langle x\rangle \\ {}^{\rho}\xi={}^{\rho}\xi(y)=\left\langle \xi(y)\right\rangle & \langle xi\rangle \end{array}\right]$$

Donde a forma $\langle x\rangle$ lê-se: [A *i-ésima* raiz da função $\xi^*(y)$; onde ***i*** é definido pelo *critério de ordenamento* $\mho$ *das raízes de* $\xi^*(y)$ é igual a *i-ésima* raiz da função $\xi^*(y)$; onde ***i*** é definido pelo *critério de ordenamento* $\mho$ *das raízes de* $\xi^*(y)$] , e, donde referente a forma $\langle xi\rangle$ podemos fazer a leitura segundo dois estilos —

i. *[Rô de ksi, indicando tratar-se de uma raiz da função ksi de y]*
ii. *[Uma raiz qualquer de* $\xi(y)$ *é igual a uma a raiz qualquer de* $\xi(y)$*]*

De modo que em nosso caso, a última forma para ω pode ser dada conforme $\langle xi\rangle$; ou seja —

$$\omega={}^{\rho}\xi={}^{\rho}\xi(y)$$

Donde o apelo — A matemática agradece pela difusão desta notação! Eis alguns exemplos clássicos —

$${}^{\rho}\left(x^2-5x+6\right)=\left\langle x^2-5x+6\right\rangle=2 \qquad {}^{\rho}\left(x^2-5x+6\right)=\left\langle x^2-5x+6\right\rangle=3$$

$${}_{\mho}^{1}\left(x^2-5x+6\right)^2=\left(\left\langle x^2-5x+6,1\right\rangle_{\mho}\right)^2=4 \qquad \sqrt{{}_{\mho}^{2}\left(x^2-5x+6\right)}=\sqrt{\left\langle x^2-5x+6,2\right\rangle_{\mho}}=\sqrt{3}$$

$${}^{\rho}\left(a^2+bx+c\right)=\left\langle a^2+bx+c\right\rangle \qquad {}^{\rho}\left(a^2+bx+c\right)=\left\langle a^2+bx+c\right\rangle$$

$$=\tfrac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right) \qquad =\tfrac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)$$

De modo que apresentado os conceitos fundamentais, antes de prosseguirmos vejamos o estudo do caso para $\Phi\left(y\right)$ dado por[4] —

$$\Phi\left(y\right)=y^4-\tfrac{5}{32}y^2+\tfrac{25}{4.096} \qquad \textbf{[N.5]}$$

De modo que de **N.5** é imediato que —

$$\begin{cases} p=-\tfrac{5}{32} \\ r=0 \\ q=\tfrac{25}{4.096} \end{cases} \qquad \textbf{[N.6]}$$

Donde, ainda, segundo o resultado **N.3**; ω é dado conforme —

$$\omega=\left\langle y^4-\tfrac{5}{32}y^2+\tfrac{25}{4.096}\right\rangle=\left\langle\Phi\left(y\right)\right\rangle={}^{\rho}\Phi\left(y\right)={}^{\rho}\Phi \qquad \textbf{[N.7]}$$

De modo que pela expressão **N.7**; ω refere-se a uma raiz da função $\Phi\left(y\right)$; donde lembramos que as raízes do polinômio já foram devidamente encontradas, e, são dadas conforme[5] —

$$\begin{cases} y_{\alpha+},y_{\beta+}=+\tfrac{1}{8}\sqrt{5} \\ y_{\alpha-},y_{\beta-}=-\tfrac{1}{8}\sqrt{5} \end{cases} \qquad \textbf{[N.8]}$$

Donde dadas as raízes **N.8;** para definir $\left\langle\Phi\left(y\right)\right\rangle$ selecionamos qualquer raiz conhecida, tal qual —

$$\omega=+\tfrac{1}{8}\sqrt{5} \qquad \textbf{[N.9]}$$

De modo que substituindo p,q e ω na expressão **N.2**; temos finalmente que —

$$\Phi^{*}\left(y\right)=1\left\{\left[y^3+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}y^2+\left[-\tfrac{5}{32}+\left(\tfrac{1}{8}\sqrt{5}\right)^2\right]y-\frac{\left(\tfrac{25}{4.096}\right)}{\tfrac{1}{8}\sqrt{5}}\right]\left(y-\tfrac{1}{8}\sqrt{5}\right)\right\} \qquad \textbf{[N.10]}$$

---

[4] Lembramos que o polinômio em questão dado por —

$$\Phi\left(y\right)=y^4-\tfrac{5}{32}y^2+\tfrac{25}{4.096}$$

foi estudado no **APÊNDICE K**, e, apresentado em **K.22**; donde ele é resultante da translação dada por —

$$x\prec\left(y-\tfrac{1}{4a}b\right)$$

Na função polinomial primitiva dada por —

$$P(x)=256x^4-640x^3+560x^2-200x+25$$

Donde, ainda, $P(x)$ denominamos de um **polinômio singular**; posto as múltiplas expressões de sua fatoração!

[5] Conforme **[K.27, APÊNDICE K]**

Segue a simplificação —

$$\begin{aligned}\Phi^*(y) &= \left[y^3+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}y^2+\left(-\tfrac{5}{32}+\tfrac{5}{64}\right)y-\tfrac{25}{4.096}\times\tfrac{8}{\sqrt{5}}\times\tfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right]\left(y-\tfrac{1}{8}\sqrt{5}\right)\\ &= \left[y^3+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}y^2+\left(\frac{2\times(-5)+5}{64}\right)y-\tfrac{25\times8\times\sqrt{5}}{4.096\times5}\right]\left(y-\tfrac{1}{8}\sqrt{5}\right)\\ &= \left[y^3+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}y^2+\left(\tfrac{-10+5}{64}\right)y-\tfrac{5\sqrt{5}}{512}\right]\left(y-\tfrac{1}{8}\sqrt{5}\right)\end{aligned} \quad \textbf{[N.11]}$$

E, enfim, a forma equivalente para a expressão **N.5** é dada conforme —

$$\Phi^*(y)=\left[y^3+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}y^2-\tfrac{5}{64}y-\tfrac{5\sqrt{5}}{512}\right]\left(y-\tfrac{1}{8}\sqrt{5}\right) \quad \textbf{[N.12]}$$

□

Assim resta-nos construir a expressão **N.2** partir de **N.1** ou demonstrar[6] que **N.2** é equivalente a expressão **N.1**. Vejamos os dois caminhos —

---

[6] Este autor defende que há uma diferença capital entre a apresentação do caminho de uma pesquisa básica e o caminho da demonstração de uma proposição matemática; posto que o **CAMINHO DE UMA PESQUISA BÁSICA ENCONTRA-SE CENTRADO NA VALIDAÇÃO OU REFUTAÇÃO DE UMA NOVA HIPÓTESE; PODENDO, CONDUZIR A INCONCLUSOS, PARADOXOS, CONJECTURAS, TEOREMAS, ... ;** enquanto, que o **CAMINHO DE UMA DEMONSTRAÇÃO, É UM, DENTRE MUITOS, PARA CONDUZIR A UMA NOVA PROVA PARA UM TEOREMA; QUE, PELO CAMINHO DE UMA PESQUISA FUNDAMENTAL; EM PRINCIPIO, JÁ FORA DEMONSTRADO;** de modo que inferimos que, enquanto o caminho de uma pesquisa encontra-se ancorada na escuridão, o caminho para uma nova demonstração, naturalmente, já tem como guia o próprio teorema! E, para reforçar alguns aspectos desta defesa, lembremo-nos, antes, de algumas histórias —

I. Lembremo-nos do esforço conduzido por Pitágoras no ocidente, e, por chineses no oriente para em um dia iluminado concluir que *´Em um triangulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos´*. Quais foram as suas motivações? Quais foram as suas observações primeiras? Quais foram as suas dificuldades? Enfim, quantas questões ficarão eternamente sem respostas, posto não temos acesso ao caminho primeiro (ou seja, o caminho da pesquisa básica) que conduziu ao TEOREMA DE PITÁGORAS! Por outro lado, já caiu em lugar comum a afirmação — *´há mais de 300 demonstrações diferentes para o teorema —*

$$h^2 = a^2 + b^2$$

II. Lembremo-nos do esforço conduzido por *Karl Friedrich Gauss* (¤1777—†1855), para em um dia iluminado [Na defesa de sua tese de doutorado com mais de 600 páginas em alemão] garantir que —

$$\exists(z_0 \in \mathbb{C}) \mid P(z_0) = \sum_{i=0}^{n} a_i z_0^i = 0; n \in \mathbb{N}^*; \forall a_i \in \mathbb{C}$$

Constituindo-se no TFA (Teorema Fundamental da Álgebra) que nos proporcionou a garantia que qualquer polinômio de grau ***n*** possui pelo menos uma raiz complexa; e, que por sua vez conduziu ao corolário da decomposição polinomial —

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i); n \in \mathbb{N}^*; a_i, z_i, z \in \mathbb{C}$$

De modo sabemos que um polinômio de grau ***n*** possui ***n*** raízes! Donde, fora a maestria dos conceitos articulados por Gauss para a prova do TFA em sua tese, que poucos se aventuraram em encontrar caminhos alternativos, que não o de Gauss, para demonstrar tal teorema.

III. Lembremo-nos do esforço conduzido pelo matemático Norueguês, *Niels Henrick Abel* (¤1802—†1829), que apresentou ao mundo a sua prova sobre a impossibilidade da resolução de uma equação algébrica (ou polinomial) do quinto grau; em um artigo de 1824; enterrando um demônio que já assombrava os algebristas de todo o mundo por cerca de dois séculos e meio; inclusive o próprio Abel, posto que ele também havia investido todos os esforços para resolvê-la (antes, de concluir pelo contrario, é claro!). Donde, o teorema, mais tarde ficou conhecido como o teorema de *Ruffini-Abel*; posto que o matemático italiano, *E. Paolo Ruffini* (¤1765—†1822), já havia dado o primeiro passo ao publicar em 1799 suas idéias em um livro; ´garantindo´ esta impossibilidade; no entanto inconclusivas; posto que os seus argumentos matemáticos eram incipientes!

IV. Lembremo-nos do esforço conduzido por *Evariste Galois* (¤1811—†1832), para demonstrar a impossibilidade da resolubilidade de equações com grau maior que 4; que caracterizou, em termos da teoria das permutações, as condições de resolubilidade por radicais das equações algébricas; e, ainda, em outras idéias que se encontravam muito além do seu tempo (mais tarde denominada de — Teoria de Grupos); e, conhecido atualmente com o Teorema Fundamental da Teoria de Galois. No entanto; não nos esqueçamos que Galois já se encontrava no ombro de três gigantes (Ruffini, Abel e Lagrange) e, assim, pode olhar mais longe! Donde é de conhecimento que a influência derradeira, fora uma idéia poderosa que absorveu na obra *´Reflexões sobre a resolução algébrica de equações´*, 1770 e de autoria de *Joseph Louis Lagrange* (¤1736—†1813), dada as palavras ´A verdadeira filosofia da questão (A resolubilidade das equações) estava na teoria das permutações´.

Donde dado estes relatos históricos, defendemos ainda que o conjunto de todas as notas — *Inclusive os equívocos, tal qual os rabiscos de Abel para encontrar uma ´solução´ para a equação do quinto grau* — constituem em material vital para a reconstituição do tecido histórico. E, para ratificar a distinção capital entre o caminho de uma pesquisa básica e o caminho uma demonstração consideramos que —

A. Fora em virtude das atitudes desbravadoras e corajosas de *Ruffini* e *Lagrange* em apresentar suas articulações de idéias inconclusivas que Abel e Galois puderam encontrar as primeiras centelhas para o fogo de suas criações. De modo que Abel alicerçado nas idéias de *Ruffini* pode desenvolver uma prova particular para a impossibilidade da EQA5; e, *Galois*, enfeitiçado fundamentalmente pela idéia que a solução para a demonstração da impossibilidade de resolução de equações polinomiais por radicais se encontravam coligadas a questões combinatórias associadas às raízes dos polinômios desenvolvida por Lagrange que Galois pode, enfim, pode desenvolver uma prova ampla para a impossibilidade de resolução de equações de grau $n \geq 5$ [Donde, ainda, é importante dizer que o próprio Teorema de Ruffini-Abel passa a ser uma conseqüência da Teoria de Galois]. Enfim, os trabalhos de *Ruffini* e *Lagrange* são magníficos exemplos de **PESQUISAS BÁSICAS QUE RESULTARAM EM INCONCLUSIVOS; POREM FUNDAMENTAIS PARA ALICERÇAR E MOTIVAR A PESQUISA BÁSICA DE ABEL E GALOIS QUE RESULTARAM EM MAGNÍFICOS TEOREMAS!**

B. Fora em virtude do fascínio exercido pela obra de *Karl Friedrich Gauss* e o desafio de desenvolver uma demonstração à altura da primeira prova do TFA, que o Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira, do IME/USP; embrenhou-se por esta mata fechada; e, enfim venceu! Donde a sua prova, pela simplicidade, foi apontada para constar no livro *The Profs on The Book*, uma coletânea das mais belas demonstrações de teoremas. De modo que o trabalho do Prof. Oswaldo é um caso exemplar de uma **NOVA DEMONSTRAÇÃO PARA UM TEOREMA PROVADO EM UMA PESQUISA BÁSICA!**

Muito embora, os elos em comum entre os caminhos de uma pesquisa básica e nova demonstração sejam, obviamente, o empenho, a paciência e o esforço Intelectual! E, muitos outros aspectos que o exíguo espaço desta nota não permite demonstrar (parafraseando *Pierre Fermat*, é claro!)

O CAMINHO DA [CONSTRUÇÃO, ANÁLISE, PESQUISA, INVESTIGAÇÃO]

TRILHA I —

Dada a função $\xi(y)$ expressa por um polinômio do quarto grau conforme —

$$\xi(y)=\lambda\left\{y^4+py^2-ry+q\right\} \qquad \textbf{[N.13]}$$

Há o intento de escrevê-la sob a forma[7] —

$$\xi^*(y)=\lambda\left\{\left[y^3+uy^2+vy+w\right](y-z)\right\} \qquad \textbf{[N.14]}$$

De modo que há a necessidade da pesquisa —

$$\exists\left\{\Gamma(p,q,r)=(u,v,w,z)\,|\left[\xi^*(y)=\xi(y)\right];\forall y\in\mathbb{C}\right\}? \qquad \textbf{[N.15]}$$

Donde, de modo geral, u,v,w e z são os parâmetros da nova forma que devem ser obtidos a partir dos coeficientes p,q,r ; mediante as funções paramétricas —

$$\begin{cases} u=u(p,q,r) \\ v=v(p,q,r) \\ w=w(p,q,r) \\ z=z(p,q,r) \end{cases} \qquad \textbf{[N.16]}$$

---

7 O leitor deve compreender que se o intento fosse escrevê-la sob a forma —

$$\xi^*(y)=\lambda\left\{(y+\alpha)^3(y-z)\right\}=\lambda\left\{\left(y^3+3\alpha y^2+3\alpha^2y+\alpha^3\right)(y-z)\right\}$$

Rapidamente concluiria que $\neg\exists(\alpha,z)\,|\left\{\xi^*(y)=\xi(y);\forall y\in\mathbb{C}\right\}$; dado que a razão maior é **A VIOLAÇÂO DE UM TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA MATEMÁTICA DA INFORMAÇÃO**; Donde em virtude deste teorema pode-se dizer que $h=\varepsilon\{\alpha,z\}$ é uma **VARIEDADE INSUFICIENTE** para representar a **COMPLEXIDADE DADA** por $H=\varepsilon\{p,q,r\}$ Em outros termos queremos dizer —

$$\left\{\psi(h)=-\log_b\frac{1}{h}\right\}<\left\{\psi(H)=-\log_b\frac{1}{H}\right\}$$

Onde h e H representam, as entropias associadas a variedade e a complexidade; ε a magnitude de estados associados a variedade e complexidade; e, finalmente, $\psi(h)$ e $\psi(H)$; a medida das quantidades de informação associadas a variedade e a complexidade (medidas em ***Nat´s***, ***Hartley´s*** ou ***Bits***; dependendo da base b *do logaritmo; (e,10,2);* respectivamente!

Ou sob a forma[8] —

$$\Gamma(p,q,r)=\big(u(p,q,r),v(p,q,r),w(p,q,r),z(p,q,r)\big) \qquad \textbf{[N.17]}$$

Donde, enfim, nesta pesquisa procura-se saber se existe $\Gamma(p,q,r)$; e, caso exista; determinar a sua expressão! Ou ainda — *Existe um conjunto de funções paramétricas de tal forma que possamos tomar uma conjunto de coeficientes* $\{p,q,r\}$ *associados a forma de expressão* $\xi(y)$ *de modo a obtermos o conjunto de parâmetros* $\{u,v,w,z\}$ *; com o objetivo de reescrever a função* $\xi(y)$ *sob a forma* $\xi^*(y)$ *e, de modo fundamental, que a nova função seja válida para* $\forall y\in\mathbb{C}$ *? Ou segundo a representação —*

$$\begin{cases}\begin{cases}\Gamma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}^4\\ (p,q,r)\mapsto(u,v,w,z)\\ \Gamma(p,q,r)=\big(u(p,q,r),v(p,q,r),w(p,q,r),z(p,q,r)\big)\end{cases}\\ \left[\Xi=(p,q,r)\xrightarrow{\Gamma(p,q,r)}\Xi^*=(u,v,w,z)\right]\Rightarrow\left[\xi^*(y)=\xi(y)\right];\forall y\in\mathbb{C}\end{cases} \qquad \textbf{[N.18]}$$

---

[8] Para compreender $\Gamma(p,q,r)$ lembre-se que uma curva no $\mathbb{R}^2$ é dado conforme —

$$\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$$

Uma curva no $\mathbb{R}^3$ é dado conforme —

$$\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

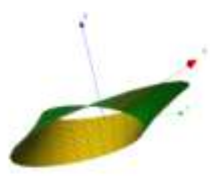
Uma superfície Gaussiana é dada sob a forma —

$$\Gamma(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$$

Donde como exemplo a *Fita de Moebius* —

$$\Gamma(u,v)=\left(\cos v+u\cos v\cos\tfrac{1}{2}v,usen\tfrac{1}{2}v,sen\ v+usen\ v\cos\tfrac{1}{2}v\right)$$

Veja —



No entanto, dado que $\Gamma(p,q,r):\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}^4$; de fato, podemos dizer que é um objeto muito complexo; donde lembramos, também, que Γ pode ser interpretado sob a forma $\Gamma(p,q,r):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^8$; se representarmos sob a forma —

$$\Gamma(p,q,r)=\begin{pmatrix}\Re\left[u(p,q,r)\right],\Im\left[u(p,q,r)\right],\Re\left[v(p,q,r)\right],\Im\left[v(p,q,r)\right],\\ \Re\left[w(p,q,r)\right],\Im\left[w(p,q,r)\right],\Re\left[z(p,q,r)\right],\Im\left[z(p,q,r)\right]\end{pmatrix}$$

Donde a nossa investigação se inicia com o desenvolvimento algébrico[9] da expressão **N.15**; com o intuito de encontrarmos as tais funções $u(p,q,r), v(p,q,r)$ e $w(p,q,r)$ e $z(p,q,r)$. Vejamos —

$$\begin{aligned}\xi(y) &= \lambda\left\{y^3y+uy^2y+vyy+wy+y^3(-z)+uy^2(-z)+vy(-z)+w(-z)\right\}\\ &= \lambda\left\{y^4+uy^3+vy^2+wy-zy^3-uzy^2-vzy-wz\right\}\\ &= \lambda\left\{y^4+uy^3-zy^3+vy^2-uzy^2+wy-vzy-wz\right\}\end{aligned} \quad \textbf{[N.19]}$$

---

[9] Pela **TRILHA I** evitamos abordar o problema dentro do contexto da divisão polinomial; questão que será abordada na **TRILHA II**; no entanto, alguns aspectos desta solução (ou seja, a determinação dos coeficientes mediante a construção de um sistema de equações) se constituem no núcleo de uma técnica denominada de **MÉTODO DE DESCARTES** associado ao problema da divisão polinomial; de modo que aqui apresentamos uma pequena síntese — Segundo a definição da divisão polinomial, *dados dois Polinômios* $f(x)$ *[Dividendo] e* $g(x)\neq 0$ *[Divisor]; dividir* f *por* g *é determinar dois outros polinômios* $q(x)$ *[Quociente] e* $r(x)$ *[Resto] de modo que se verifiquem as duas condições seguintes* —

i. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$

ii. $\partial r(x)<\partial g(x)$ *(Ou* $r=0$*, nos casos em que a divisão polinomial é denominada Exata).*

De modo que dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)\neq 0$; constitui-se em um problema clássico a determinação dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$; donde, em principio, para resolver este problema há os Métodos da Chave, de Descartes e o algoritmo de *Briot-Ruffini* quando o polinômio $g(x)$ apresenta grau 1. O MÉTODO DE DESCARTES, também denominado de Método dos Coeficientes a Determinar, fundamenta-se nos princípios—

A. $\partial q(x)=\partial f(x)-\partial g(x)$ *[Em verdade uma conseqüência da definição, posto que* $f(x)=q(x)g(x)+r(x)\Rightarrow \partial f(x)=\partial\big(q(x)g(x)+r(x)\big)$*; logo* $\partial f(x)=\partial\big(q(x)g(x)\big)\Rightarrow \partial f(x)=\partial q(x)+\partial g(x)\therefore \partial q(x)=\partial f(x)-\partial g(x)$□

B. $\partial r(x)<\partial g(x)$ *[Ou* $r=0$*)*

Donde, o MÉTODO DE DESCARTES é aplicado conforme os passos —

i. *Calcula-se* $\partial q(x)$ *e* $\partial r(x)$

ii. *Constroem-se os polinômios* $q(x)$ *e* $r(x)$*; deixando incógnitos os seus coeficientes*

iii. *Determinam-se os coeficientes impondo a igualdade* $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$

Assim, se o intento for calcular $\dfrac{x^5+4x^4+12x^3+20x^2+25x+15}{x^2+2x+3}$

Segundo o MÉTODO DE DESCARTES, portanto, obtemos $\partial q(x)=5-2=3$ e $\partial r(x)<\partial g(x)\therefore 1<2$; de modo que $q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ e $r(x)=ex+f$; assim impomos a igualdade polinomial —

$$\overbrace{x^5+4x^4+12x^3+20x^2+25x+15}^{f(x)}=\overbrace{\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)}^{q(x)}\overbrace{\left(x^2+2x+3\right)}^{g(x)}+\overbrace{\left(ex+f\right)}^{r(x)}$$

Donde um sistema de equações é construído, de modo que obtemos $[a=1;b=2;c=5;d=4;e=2;\ f=3]$; donde se conclui que $q(x)=x^3+2x^2+5x+4$ e $r(x)=2x+3$; prova —

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(x^3+2x^2+5x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)+\left(2x+3\right)\\&=\left(x^5+2x^4+3x^3\right)+\left(2x^4+4x^3+6x^2\right)+\left(5x^3+10x^2+15x\right)+\left(4x^2+8x+12\right)+\left(2x+3\right)\\&=x^5+(2+2)x^4+(3+4+5)x^3+(10+6+4)x^2+(15+8+2)x+12+3\\&=x^5+4x^4+12x^3+20x^2+25x+15\ \square\end{aligned}$$

Enfim —

$$\xi(y)=\lambda\left\{y^4+(u-z)y^3+(v-uz)y^2+(w-vz)y-wz\right\} \qquad \textbf{[N.20]}$$

Donde pelo princípio da identidade polinomial entre **N.20** e **N.13** constitui-se um sistema de equações K dado por —

$$\mathrm{K}=\begin{bmatrix} u-z=0 & \langle i\rangle \\ v-uz=p & \langle ii\rangle \\ w-vz=-r & \langle iii\rangle \\ -wz=q & \langle vi\rangle \end{bmatrix} \qquad \textbf{[N.21]}$$

Donde da equação $\langle i\rangle$ do sistema de equações K definido em **N.21** temos —

$$\begin{aligned} u-z&=0 \\ &\therefore \\ u&=u(p,q,r) \\ &=z \end{aligned} \qquad \textbf{[N.22]}$$

De modo que substituindo o resultado **N.22** na equação $\langle ii\rangle$ do sistema de equações K definido em **N.21** temos —

$$\begin{aligned} v-\overset{z}{(u)}z&=p \\ &\rightarrow \\ v-z^2&=p \\ &\therefore \\ v&=v(p,q,r) \\ &=p+z^2 \end{aligned} \qquad \textbf{[N.23]}$$

Por outro lado da equação $\langle iv\rangle$ do sistema de equações K definido em **N.21** temos —

$$\begin{aligned} -wz&=q \\ &\therefore \\ w&=w(p,q,r) \\ &=-\tfrac{q}{z} \end{aligned} \qquad \textbf{[N.24]}$$

Donde, finalmente substituindo os resultados **N.23** e **N.24** na equação $\langle iii \rangle$ do sistema de equações K definido em **N.21** temos —

$$\overset{-\frac{q}{z}}{(w)} - \overset{p-z^2}{(v)}\, z = -r$$
$$\rightarrow$$
$$c - \left(p + z^2\right) z = -r$$
$$\rightarrow$$
$$-\tfrac{q}{z} - \left(pz + z^3\right) = -r$$
$$\rightarrow$$
$$-\tfrac{q}{z} - pz - z^3 = -r \qquad \textbf{[N.25]}$$
$$\rightarrow$$
$$(-z)\left(-\tfrac{q}{z} - pz - z^3\right) = (-z)(-r)$$
$$\rightarrow$$
$$+q + pz^2 + z^4 = +rz$$
$$\therefore$$
$$z^4 + pz^2 - rz + q = 0$$

Ora, o que é z, portanto? Em primeiro lembramos que dois polinômios idênticos são definidos conforme —

$$\{P(x) \equiv Q(x)\} \Leftrightarrow \{[P(x) = Q(x)]; \forall x \in \mathbb{C}\} \qquad \textbf{[N.26]}$$

Donde a condição **N.26** é satisfeita, se e somente[10] se os polinômios apresentarem o mesmo grau ∂ e todos os coeficientes do primeiro são iguais ao segundo, ou seja —

$$\left[\left(P(x) = \sum_{i=0}^{\partial P(x)} a_i x^i\right) \equiv \left(Q(y) = \sum_{i=0}^{\partial Q(y)} b_i y^i\right)\right] \Leftrightarrow \{[\partial = \partial P(x) = \partial Q(y)] \wedge (a_i = b_i); \forall i \in [0, \partial]\}$$

[N.27]

De modo que se $P(x) \equiv Q(y)$, então os conjuntos das raízes S_P e S_Q associados, respectivamente, aos polinômios $P(x)$ e $Q(y)$ são iguais, ou seja, —

$$[P(x) \equiv Q(y)] \Rightarrow \{[S_P = \{x_i \mid P(x_i) = 0\}] = [S_Q = \{y_i \mid Q(y_i) = 0\}]\} \qquad \textbf{[N.28]}$$

De modo que —

$$\begin{bmatrix} f(y) = y^4 + py^2 - ry + q \\ g(z) = z^4 + pz^2 - rz + q \end{bmatrix} \Rightarrow [f(y) \equiv g(z)] \Rightarrow S_f = S_g \qquad \textbf{[N.29]}$$

Ou seja, denominando-se que Y_i é uma raiz da equação $y^4 + py^2 - ry + q = 0$ é o mesmo que dizer que Y_i é uma raiz da equação $z^4 + pz^2 - rz + q = 0$; ou ainda, denominando-se que Z_i é uma raiz da equação $z^4 + pz^2 - rz + q = 0$ é o mesmo que dizer que Z_i é uma raiz da equação $y^4 + py^2 - ry + q = 0$;

---

[10] Há uma belíssima prova para esta condição. Vejamos —

$$\begin{bmatrix} a_i = b_i; \forall i \in [0, n] & [i] \\ (a_i - b_i) = 0; \forall i \in [0, n] & [ii] \\ (a_i - b_i) x^i = 0; \forall i \in [0, n] & [iii] \\ \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i = 0; \forall i \in [0, n] & [iv] \\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0; \forall i \in [0, n] & [v] \\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i; \forall i \in [0, \partial \triangleq n] & [vi] \\ P(x) \equiv Q(x) & [vii] \end{bmatrix} \therefore [P(x) \equiv Q(x)] \Leftrightarrow [(a_i = b_i); \forall i \in [0, \partial]]$$

□

Donde, ainda, neste caso, podemos afirmar algo mais[11] —

---

[11] A expressão **N.30** se vale da moderníssima, compacta e eficiente notação —

$$x_i = \left\langle P(x), i \right\rangle_{\mho_j}$$

Onde se lê — ***x*** índice ***i*** é igual é i-ésima raiz do polinômio ***P(x)*** regido pelo critério de ordenamento $\mho_j$ [Este símbolo, lê-se **AGEMO;** que é a palavra **OMEGA** escrita ao contrário]***!*** Lembrando que em alguns textos orientados para a computação simbólica encontra-se, também, sob a forma —

$$x_i = root\left[P(\#), i \right]$$

Donde é necessário dizer que dado o conjunto de raízes Φ associado a um polinômio $P_n(x)$; ou seja —

$$\Phi = \left\{ x_i \mid P(x_i) = 0 \right\} = \left\{ x_0, x_1, \ldots, x_n \right\} = \bigcup_{i=0}^{n} x_i$$

É **FUNDAMENTAL** definir-se, a priori, $\mho_j$; ou seja, os **CRITÉRIOS DE ORDENAMENTO** das raízes pertencentes ao conjunto $\Phi_{\mho_j}$; ou seja, o conjunto ordenado das raízes segundo um critério $\mho_j$; obviamente, associado as raízes reais e complexas, que, doravante serão todas tratados como complexas e que pertencem ao conjunto de raízes Φ; de modo que **SOMENTE NESTA** condição; ou seja, mediante a notação e os critérios de ordenamento definidos pode-se fazer uma referencia tal qual —

$$x = \left\langle 256x^4 - 640x^3 + 560x^2 - 200x + 25, 3 \right\rangle_{\mho}$$

De modo que a expressão possa carregar um sentido operacional! Desta forma, dado que ainda não definimos $\mho$;a expressão anterior se encontra destituída de qualquer sentido e ***x*** não pode ser determinado!!! No entanto, definindo-se o critério de ordenamento das raízes pertencentes a Φ; então será formalizada uma linguagem e X encontrar-se-á definido. De modo que vamos estabelecer $\mho_j$; ou seja, o critério de ordenamento para o conjunto ordenado $\Phi_{\mho}$ associado ao conjunto comum Φ [Atenção: Embora não haja consensualidade sobre $\mho$; este autor defende que o que segue é o critério natural e canônico] —

i. Quaisquer raízes com norma dada por $\|x\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e menor; **ANTECEDEM** as raízes com norma maior ou igual.
ii. Dentre as raízes com normas iguais, **ANTECEDEM** as raízes com a parte real menor ou igual.
iii. Dentre as raízes com normas e partes reais iguais, **ANTECEDEM** as raízes com a parte imaginária menor ou igual.

Ou formalmente, $\mho$ é dado pelo critério —

$$\mho = \left\langle \begin{array}{c} \forall i \left| x_\alpha \in \mathbb{C} \right\rangle \le \forall j \left| x_\beta \in \mathbb{C} \right\rangle \Leftrightarrow \|x_\alpha\| \le \|x_\alpha\| \\ \forall i \left| x_\alpha \in \mathbb{C} \right\rangle \le \forall j \left| x_\beta \in \mathbb{C} \right\rangle \Leftrightarrow \left(\|x_\alpha\| \le \|x_\beta\| \right) \wedge \left(\Re(x_\alpha) \le \Re(x_\beta) \right) \\ \forall i \left| x_\alpha \in \mathbb{C} \right\rangle \le \forall j \left| x_\beta \in \mathbb{C} \right\rangle \Leftrightarrow \left(\|x_\alpha\| \le \|x_\beta\| \right) \wedge \left(\Re(x_\alpha) = \Re(x_\beta) \right) \wedge \left(\Im(x_\alpha) \le \Im(x_\beta) \right) \end{array} \right\rangle$$

De modo que, é fácil verificar que —

$$sen^2 \tfrac{2}{5} \pi = \left\langle 256x^4 - 640x^3 + 560x^2 - 200x + 25, 3 \right\rangle_{\mho}$$

De modo que dado o conjunto S de raízes associado a $P(x)$; donde de S obtemos $S_{\mho}$ pelo critério $\mho$; ou seja —

$$S = \left\{ -5, 5, \sqrt{12} - 2i, \sqrt{12} + 2i, 1, -2i, 4, -4, 3 - i\sqrt{7}, 3, 3 + i\sqrt{7}, -1, 2i, 0 \right\}$$
$$S_{\mho} = \left\langle \langle 0 \rangle, \langle -1, 1 \rangle, \langle -2i, 2i \rangle, \left\langle -4, 3 - i\sqrt{7}, 3, 3 + i\sqrt{7}, \sqrt{12} - 2i, \sqrt{12} + 2i, 4 \right\rangle, \langle -5, 5 \rangle \right\rangle$$

Encontram-se definidas e são verdadeiras as expressões —

$$\left\langle P(x), 4 \right\rangle_{\mho} = -2i \quad \sqrt{\sqrt{\left\langle P(x), 11 \right\rangle_{\mho}}} = \sqrt{\sqrt{12 + 2i}} \quad \prod_{i=0}^{n} \left\langle P(x), i \right\rangle_{\mho} = 0 \quad f(z) = \sqrt{5}\left(z - \left\langle P(x), 9 \right\rangle_{\mho} \right)$$

Donde ainda, vale a observação final que no ´mundo´ $\mho$ inexiste ***x*** complexo menor que zero, posto que $\|\forall x\| \ge 0$!

$$\omega = \omega_i = \left\{ Z_i = \left\langle z^4 + pz^2 - rz + q, i \right\rangle_{\mho_j} = Y_i = \left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i \right\rangle_{\mho_j} ; \forall i \in \{1,2,3,4\} \right\} \qquad \textbf{[N.30]}$$

Donde, em síntese temos —

$$\begin{bmatrix} N.22 & \rightarrow & u = u(p,q,r) = z; (z \prec \omega) \therefore u = \omega \\ N.23 & \rightarrow & v = v(p,q,r) = p + z^2; (z \prec \omega) \therefore u = p + \omega^2 \\ N.24 & \rightarrow & w = w(p,q,r) = -\frac{q}{z}; (z \prec \omega) \therefore w = -\frac{q}{\omega} \\ N.25 & \rightarrow & z = z(p,q,r) = \left\langle z^4 + pz^2 - ry + q = 0 \right\rangle ; ((Z_i = Y_i) \prec \omega) \therefore z = \omega \end{bmatrix} \qquad \textbf{[N.31]}$$

Enfim —

$$\begin{aligned} \Gamma_i(p,q,r) &= \left(\omega_i, p + \omega_i^2, -\tfrac{q}{\omega_i}, \omega_i\right) \\ &= \begin{pmatrix} \left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i \right\rangle_{\mho}, \\ p + \left[\left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i \right\rangle_{\mho} \right]^2, \\ -\frac{q}{\left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i \right\rangle_{\mho}}, \\ \left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i \right\rangle_{\mho} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{[N.32]}$$

De modo que a indagação fundamental desta pesquisa tem aqui o seu desfecho —

$$\begin{aligned} &\exists \left\{ \Gamma(p,q,r) = (u,v,w,z) \mid \left[\xi(y) = \xi^*(y) \right]; \forall y \in \mathbb{C} \right\} ? \\ &\rightarrow \\ &\{\exists\} \end{aligned} \qquad \textbf{[N.33]}$$

Ou seja – Sim! *Existe um conjunto de funções paramétricas de tal forma que possamos tomar um conjunto de coeficientes* $\{p,q,r\}$ *associados a forma de expressão* $\xi(y)$ *de modo a obtermos o conjunto de parâmetros* $\{u,v,w,z\}$ *com o objetivo de reescrever a função* $\xi(y)$ *sob a forma* $\xi^*(y)$ *e, de modo fundamental, que a nova função seja válida para* $\forall y \in \mathbb{C}$ *!*

De modo que é possível construir $\xi^*(y)$ substituindo os resultados **N.31** em **N.14**; com efeito, —

$$\xi^*(y) = \lambda \left\{ \left[y^3 + \omega y^2 + (p + \omega^2) y - \frac{q}{\omega} \right] (y - \omega) \right\}; \lambda, p, q, r \in \mathbb{R}; y, \omega_i \in \mathbb{C} \qquad \textbf{[N.34]}$$

Onde p e q são os mesmos coeficientes dos termos em y^2 e y^0 ; respectivamente e, referentes a forma polinomial expressa em **N.1** e, ω_i é dado sob a forma—

$$\omega_i = {}^{\rho}\xi = {}^{\rho}\xi(y) = \left\langle \xi(y) \right\rangle = \left\langle \xi^*(y) \right\rangle = \left\langle y^4 + py - ry + q \right\rangle \qquad \textbf{[N.35]}$$

Donde, enfim, $\xi^*(y)$ é uma forma de representação alternativa para $\xi(y)$!

TRILHA II —

Para caminharmos por esta trilha são necessárias algumas ferramentas da TEORIA POLINOMIAL, em verdade, uma definição; dois teoremas básicos & um algoritmo. Vejamos —

A DEFINIÇÃO DA DIVISÃO POLINOMIAL

Dados dois Polinômios $f(x)$ *[Dividendo] e* $g(x) \neq 0$ *[Divisor]; dividir* f *por* g *é determinar dois outros polinômios* $q(x)$ *[Quociente] e* $r(x)$ *[Resto] de modo que se verifiquem as duas condições seguintes —*

i. $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$

ii. $\partial r(x) < \partial g(x)$ *(Ou* $r = 0$*, nos casos em que a divisão polinomial é denominada Exata).*

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio f *por* $x-\alpha$ *é igual ao valor de* f *em* α *; ou seja,* $r = f(\alpha)$.

PROVA

De acordo com o ***item i.*** da divisão polinomial temos —

$$f(x) = q(x)(x-\alpha) + r \qquad \textbf{[N.36]}$$

Onde $q(x)$ e $r(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto. E, de acordo, com o ***item ii***. da divisão polinomial, como $(x-\alpha)$ tem grau 1, ou seja, $\partial(x-\alpha) = 1$; então o grau do resto $r(x)$ tem grau zero ou o resto é nulo; ou seja, $(\partial r(x) = 0) \vee (r = 0)$; portanto, $r(x)$ é o polinômio constante. Calculemos, portanto, o valor de f *da igualdade **N.36** no ponto* α —

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= q(\alpha)\overbrace{(\alpha-\alpha)}^{0} + r(\alpha) \\ &= r(\alpha) \\ &\therefore \\ f(\alpha) &= r \end{aligned} \qquad \textbf{[N.37]}$$

□

TEOREMA DE D´ALEMBERT

Um polinômio f *é divisível por* $\left(x-\alpha\right)$*; se e somente se;* α *é uma raiz de* f *.*

PROVA

De acordo com o TEOREMA DO RESTO, temos —

$$r = f\left(\alpha\right) \qquad \textbf{[N.38]}$$

Ora, dizemos que f é divisível por $\left(x-\alpha\right)$; se e somente se, o resto é nulo, de modo que —

$$\left\{\begin{array}{l} \overbrace{\left(r=0\right)}^{f \text{ é divisivel por } \left(x-\alpha\right)} \Rightarrow \overbrace{\left[f\left(\alpha\right)=0\right]}^{\alpha \text{ é uma raiz de f}} \\ \overbrace{\left(r=0\right)}^{f \text{ é divisivel por } \left(x-\alpha\right)} \Leftarrow \overbrace{\left[f\left(\alpha\right)=0\right]}^{\alpha \text{ é uma raiz de f}} \end{array}\right\} \qquad \textbf{[N.39]}$$

$$\therefore$$

$$\left[f \text{ é divisivel por } \left(x-\alpha\right)\right] \Leftrightarrow \left[\alpha \text{ é uma raiz de } f\right]$$

$$\square$$

O ALGORITMO DE BRIOT-RUFFINI

Os coeficientes do quociente $q\left(x\right)$ resultante da divisão polinomial de $f\left(x\right)$ por $\left(x-\alpha\right)$ podem ser obtidos rapidamente pelo algoritmo[12] de *Briot-Ruffini*. Neste algoritmo dispomos de todos os coeficientes do polinômio $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; bem como α conforme a disposição —

$$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \ldots \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0 \big| \alpha \qquad \textbf{[N.40]}$$

Em seguida ´baixamos´ o coeficiente a_n conforme ——

$$\begin{array}{ccccccc|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1 & a_0 & \alpha \\ a_n & & & & & & & \end{array} \qquad \textbf{[N.41]}$$

Donde o próximo passo é multiplicar a_n por α . Vejamos —

$$\begin{array}{ccccccc|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1 & a_0 & \alpha \\ a_n & & & & & & & \end{array} \qquad \textbf{[N.42]}$$

$$\times$$

[12] Há muitos que preferem o termo —*Dispositivo Prático de Briot-Ruffini.*

O próximo passo é dispor o produto αa_n na coluna a_{n-1} e proceder a soma. Vejamos —

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & + & & & & & \\
 & \alpha a_n & & & & & \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_2 & a_1 & a_0 & \alpha \\
a_n & \alpha a_n + a_{n-1} & & & & & \\
 & \times & & & & &
\end{array}
\qquad \textbf{[N.43]}
$$

Donde o próximo passo é efetuar o produto $\alpha\left(\alpha a_n + a_{n-1}\right)$. Vejamos —

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & + & & & & & \\
 & \alpha a_n & & & & & \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_2 & a_1 & a_0 & \alpha \\
a_n & \alpha a_n + a_{n-1} & & & & & \\
 & \times & & & & & \\
 & \times & & & & &
\end{array}
\qquad \textbf{[N.44]}
$$

Em seguida dispomos o produto $\alpha\left(a_{n-1}+\alpha a_n\right)$ na coluna a_{n-2} e efetuamos a soma. Vejamos —

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 & \alpha a_n & \alpha\left(\alpha a_n + a_{n-1}\right) & & & & & & \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \alpha \\
a_n & \alpha a_n + a_{n-1} & \alpha\left(\alpha a_n + a_{n-1}\right) + a_{n-2} & & & & & &
\end{array} \qquad \textbf{[N.45]}$$

E, assim sucessivamente até obtermos a última soma com o coeficiente a_0; donde esta última operação de adição determinará o resto $\boxed{r}$ da divisão polinomial do polinômio $f(x)$ por $(x-\alpha)$; ou seja[13], $r=\left[\alpha\left(\ldots\left(\alpha\left(\alpha\left(\alpha a_n+a_{n-1}\right)+a_{n-2}\right)+a_{n-3}\right)\ldots+a_1\right)+a_0\right]$; de modo que todos os coeficientes da divisão polinomial de $f(x)$ por $(x-\alpha)$; aqui denominados $b_m, b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0$ bem como o resto r são, portanto, determinados conforme —

$$\begin{array}{cccccccc|c} & \alpha a_n & \alpha\left(a_{n-1}+\alpha a_n\right) & & & & & & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & & \alpha \\ \underset{b_m}{a_n} & \underbrace{a_{n-1}+\alpha a_n}_{b_{m-1}} & \underbrace{\alpha\left(a_{n-1}+\alpha a_n\right)+a_{n-2}}_{b_{m-2}} & & \underset{b_1}{(\ )} & \underset{b_0}{(\ )} & \underset{\boxed{r}}{(\ )} & & \end{array} \qquad \text{[N.46]}$$

Donde é fundamental lembrar que $m = n-1$.

---

[13] Notemos a expressão final para o resto r seguindo os passos do algoritmo de *Briot-Ruffini* —

$$r=\left[\alpha\left(\ldots\left(\alpha\left(\alpha\left(\alpha a_n+a_{n-1}\right)+a_{n-2}\right)+a_{n-3}\right)\ldots+a_1\right)+a_0\right]$$

Se desenvolvermos esta expressão obteremos —

$$r=\left[\left(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+a_{n-2}\alpha^{n-2}+\ldots+a_2\alpha^2+a_1\alpha^1\right)+a_0\right]$$

Ou seja —

$$r=\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i$$

Ou seja, ainda —

$$r=f(\alpha)$$

Enfim, em conformidade absoluta com o Teorema do Resto —

´O resto da divisão de um polinômio f por $x-\alpha$ é igual ao valor de f em α ´

Enfim, para concluir vejamos dois simples exemplos —

EXEMPLO I —

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3} \qquad \textbf{[N.47]}$$

Donde mediante *Briot-Ruffini* temos —

$$\begin{array}{ccc|c} & +3 & -6 & \\ 1 & -5 & +6 & 3 \\ 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array} \qquad \textbf{[N.48]}$$

Donde obtemos o quociente $q(x)=x-2$ e o resto $\boxed{r=0}$; ou seja —

$$\begin{bmatrix} q(x)=x-2 \\ r(x)=0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\overbrace{(x^2-5x+6)}^{f(x)}=\overbrace{(x-2)}^{q(x)}\overbrace{(x-3)}^{g(x)}+\overset{r(x)}{0} \qquad \textbf{[N.49]}$$

EXEMPLO II —

$$\frac{3x^5+4x^4-5x^3-2x^2+3x-7}{x+2} \qquad \textbf{[N.50]}$$

Donde mediante *Briot-Ruffini* temos —

$$\begin{array}{cccccc|c} & -6 & +4 & +2 & 0 & -6 & \\ +3 & +4 & -5 & -2 & +3 & -7 & -2 \\ +3 & -2 & -1 & 0 & +3 & \boxed{-13} & \end{array} \qquad \textbf{[N.51]}$$

Donde obtemos o quociente $q(x)=3x^4-2x^3-x^2+0x+3$ e o resto $\boxed{r=-13}$; ou seja —

$$\begin{bmatrix} q(x)=q(x)=3x^4-2x^3-x^2+0x+3 \\ r(x)=-13 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\overbrace{(3x^5+4x^4-5x^3-2x^2+3x-7)}^{f(x)}=\overbrace{(3x^4-2x^3-x^2+0x+3)}^{q(x)}\overbrace{(x+2)}^{g(x)}+\overset{r(x)}{(-13)} \qquad \textbf{[N.52]}$$

E, dado que apresentamos alguns conceitos fundamentais da TEORIA POLINOMIAL, voltemos ao problema, ou seja, dado a função $\xi(y)$ expressa por um polinômio do quarto grau conforme —

$$\xi(y) = \lambda\left\{y^4 + py^2 - ry + q\right\} \qquad \textbf{[N.53]}$$

Há o intento de escrevê-la sob a forma —

$$\xi^*(y) = \lambda\left\{\left[y^3 + uy^2 + vy + w\right](y - z)\right\} \qquad \textbf{[N.54]}$$

De modo que por esta trilha, o problema da determinação da $\{u, v, w, z\}$ se resume a uma simples divisão polinomial, ou seja —

$$\frac{y^4 + py^2 - ry + q}{y - z} \qquad \textbf{[N.55]}$$

Posto que pela definição da divisão polinomial temos —

$$y^4 + py^2 - ry + q = \left(y^3 + uy^2 + vy + w\right)(y - z) + R(y) \qquad \textbf{[N.56]}$$

De modo que já antecipamos a conclusão que a condição necessária para que a expressão **N.56** conduza a expressão **N.54** é —

$$R(y) = 0 \qquad \textbf{[N.57]}$$

Donde em outros termos queremos dizer que $y^4 + py^2 - ry + q$ deve ser divisível por $y - z$! De modo que pelo TEOREMA DE D´ALEMBERT, esta divisibilidade só é possível; se e somente se; z for uma raiz do polinômio $y^4 + py^2 - ry + q$! De modo que utilizando a notação já apresentada temos –

$$\left[R(y) = 0\right] \Leftrightarrow \left\{z = \left\langle y^4 + py^2 - ry + q\right\rangle\right\} \qquad \textbf{[N.58]}$$

E, lembrando que já foi amplamente discutido em **N.26** —**N.30** é imediato que —

$$\omega = \omega_i = \left\{Z_i = \left\langle z^4 + pz^2 - rz + q, i\right\rangle_{\mho_j} = Y_i = \left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i\right\rangle_{\mho_j}; \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}\right\} \qquad \textbf{[N.59]}$$

Enfim, ω é uma raiz do polinômio! Donde, neste ponto resta-nos utilizar o algoritmo de *Briot-Ruffini* para determinar os coeficientes $\{u, v, w\}$. Vejamos —

$$\begin{array}{ccccc|c}
 & \omega & \omega^2 & \omega^3 + p\omega & \omega^4 + p\omega^2 - r\omega & \\
1 & 0 & p & -r & q & \omega \\
1 & \underbrace{\omega + 0}_{u} & \underbrace{p + \omega^2}_{v} & \underbrace{\omega^3 + p\omega - r}_{w} & \underbrace{\omega^4 + p\omega^2 - r\omega + q}_{r} &
\end{array} \qquad \textbf{[N.60]}$$

Donde em síntese concluímos que —

$$\begin{cases} u = \omega \\ v = p + \omega^2 \\ w = \omega^3 + p\omega - r \\ r = \omega^4 + p\omega^2 - r\omega + q \end{cases} \qquad \textbf{[N.61]}$$

De modo, que em princípio, segundo a definição da divisão polinomial temos —

$$y^4 + py^2 - ry + q = \left[y^3 + \omega y^2 + \left(p + \omega^2\right)y + \left(\omega^3 + p\omega - r\right)\right](y - \omega) + \overbrace{\left[\omega^4 + p\omega^2 - r\omega + q\right]}^{R(y)}$$

[N.62]

No entanto, dado que ω é uma raiz do polinômio, $R(y) = 0$; portanto, **N.62** pode ser reescrito conforme —

$$y^4 + py^2 - ry + q = \left[y^3 + \omega y^2 + \left(p + \omega^2\right)y + \left(\omega^3 + p\omega - r\right)\right](y - \omega) \qquad \textbf{[N.63]}$$

Donde surge um detalhe inusitado! Pela TRILHA I obtemos a expressão final para w conforme —

$$w = -\frac{q}{\omega} \qquad \textbf{[N.64]}$$

E pela TRILHA II obtemos para w a expressão final —

$$w = \omega^3 + p\omega - r \qquad \textbf{[N.65]}$$

De modo a questão — *Por que esta divergência? Há equívocos em algum caminho?* E a resposta — Não! Ambas as expressões são equivalentes e vamos provar! Para tanto lembramos que ω é uma raiz do polinômio, logo —

$$\begin{gathered} \omega^4 + p\omega^2 - r\omega + q = 0 \\ \to \\ \omega^4 + p\omega^2 - r\omega = -q \\ \to \\ \tfrac{1}{\omega}\left(\omega^4 + p\omega^2 - r\omega\right) = \tfrac{1}{\omega}(-q) \\ \therefore \\ \omega^3 + p\omega - r = -\tfrac{q}{\omega} \\ \square \end{gathered} \qquad \textbf{[N.66]}$$

Donde neste ponto é apenas uma questão de ´gosto´ o uso do resultado **N.64** ou **N.65**; donde optamos pela forma **N.64** por ser mais compacta.

Enfim, por esta trilha finalizando o resultado **N.63** obtemos a mesma expressão final para $\xi^*(y)$ —

$$\xi^*(y) = \lambda\left\{\left[y^3 + \omega y^2 + \left(p + \omega^2\right)y - \frac{q}{\omega}\right](y - \omega)\right\}; \lambda, p, q, r \in \mathbb{R}; y, \omega_i \in \mathbb{C} \qquad \textbf{[N.67]}$$

Onde p e q são os mesmos coeficientes dos termos em y^2 e y^0 ; respectivamente e, referentes a forma polinomial expressa em **N.1** e, ω_i é dado sob a forma —

$$\omega_i = {}^{\rho}\xi = {}^{\rho}\xi(y) = \left\langle \xi(y) \right\rangle = \left\langle \xi^*(y) \right\rangle = \left\langle y^4 + py - ry + q \right\rangle \qquad \textbf{[N.68]}$$

Donde, enfim, $\xi^*(y)$ é uma forma de representação alternativa para $\xi(y)$!

CONCLUSÃO —

Independente da trilha caminhada as conclusões fundamentais devem ser as mesmas, no entanto, não é raro que ao caminharmos por trilhas distintas para resolver um dado problema, há inúmeras conclusões conexas; tal qual neste simples estudo o detalhe inusitado das expressões **N.64** & **N.65**; que não ficaria evidente caso caminhássemos apenas um uma simples trilha, quer seja a primeira ou a segunda![14] ℧Ω

[14] Não concluiremos este caminho com uma marca de final de uma prova ou demonstração; tal qual **Q.E.D**; ou seja, a abreviação do termo em latim, '*Quod Erat Demonstrandum*' ('O que devia ser demonstrado'); ou C.Q.D.; em português, 'Como queríamos demonstrar'; ou ainda, o moderno símbolo gráfico □ ; conhecido como o símbolo de *Halmos*, que fora introduzido pelo matemático Húngaro, *Paul Richard Halmos*; posto o que seguiu (**TRILHA I, N.13— N.35)** e (**TRILHA II, N.36— N.68)** são caminhos investigativos!!! De modo que; tal qual fizemos a proposta para a formalização e disseminação do signo ${}^{\rho}\xi$; significando a raiz de ξ ; donde, claro, ksi é uma função! Também, apresentamos o signo —

℧Ω

Para dizer ´**E, ENFIM, A ORDEM FORA ESTABELECIDA!**´ Ou seja, declarar a finalização de um caminho investigativo, com a apresentação de resultados e conclusões! Donde faremos a defesa da adequação do signo ℧Ω — ´ O signo (℧ ,AGEMO), encontra-se carregado de acepções sobre a ordem; dado que o seu nome resulta de um anagrama para (OMEGA, Ω); neste caso uma simples inversão; no entanto, paradoxalmente, também, encontra-se associado a idéia do algo que encontra-se de ´ponta cabeça´; que, por sua vez remete a idéia de ´um algo fora de lugar´, enfim, perdido, disperso, primitivo, desconexo e enfim, **DESORDENADO!** Ou seja, associada a idéia da ´ausência de ordem´; tal qual o estágio inicial de qualquer pesquisa (Donde devemos também dizer — Sequer haveria o sentido e a motivação para uma pesquisa se a ordem já se encontrasse estabelecida!) Assim, apenas pelo caminho do esforço, do trabalho, do dispêndio energético, é possível, reverter o quadro de escuridão para a luz, da desordem para a ordem, enfim, reverter ℧ para Ω ; posto, Ω ; já se encontra muito carregado de acepções coligadas a idéia de ´fim, final´; dado que é a ultima letra do alfabeto grego; bem como o imaginário fora ao longo dos tempos operado pelas passagens nas escrituras bíblicas —

Em Latim —

EGO SUM α ET ω PRINCIPIUM ET FINIS DICIT DOMINUS DEUS QUI EST ET QUI ERAT ET QUI VENTURUS EST OMNIPOTENS

APOCALIPSE DE JOÃO 1:8

"Eu sou o Alfa e o Ômega, diz o Senhor D´us, aquele que é, que era e que há de vir, o Todo-poderoso" .

Em Grego —

ἐγὼ τὸ ἄλφα καὶ τὸ ὦ, ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἔσχατος, ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος

APOCALIPSE DE JOÃO 22:13

"Eu sou o Alfa e o Ômega, o primeiro e o último, o princípio e o fim" .

De modo que vos digo, tal é a sincronicidade do signo ℧Ω com o repertório signico encontrado no imaginário humano que fora sedimentado pelos tempos, que parece ter saído da forja de Zeus, para ocupar o imaginário humano associado com a carga signica ´Latu Sensu´ — **E, ENFIM, A ORDEM FORA ESTABELECIDA** e, ´Stricto Sensus´ — **A PESQUISA ESTÁ CONCLUÍDA!**

TEOREMA $\xi\xi^*\xi$

A função $\xi(y)=\lambda\left\{y^4+py^2-ry+q\right\};\lambda,p,q,r\in\mathbb{R};y\in\mathbb{C}$ *pode ser expressa sob a forma* $\xi^*(y)=\lambda\left\{\left[y^3+\omega y^2+\left(p+\omega^2\right)y-\dfrac{q}{\omega}\right](y-\omega)\right\};\lambda,p,q,r\in\mathbb{R};y,\omega\in\mathbb{C}$ *onde* p *e* q *são os coeficientes dos termos em* y^2 *e* y^0 *referentes a forma polinomial em* $\xi(y)$*;*
e $\omega=\left\langle\xi(y)\right\rangle=\left\langle\xi^*(y)\right\rangle=\left\langle y^4+py-ry+q\right\rangle$.

PROVA —

Façamos o desdobramento da expressão para $\xi^*(y)$. Com efeito —

$$\begin{aligned}
\xi^*(y)&=\lambda\left\{\left[y^3+\omega y^2+\left(p+\omega^2\right)y-\frac{q}{\omega}\right](y-\omega)\right\}\\
&=\lambda\left\{+y^3(y-\omega)+\omega y^2(y-\omega)+\left(p+\omega^2\right)y(y-\omega)-\frac{q}{\omega}(y-\omega)\right\}\\
&=\lambda\left\{+y^3y+y^3(-\omega)+\omega y^2y+\omega y^2(-\omega)+\left(p+\omega^2\right)yy+\left(p+\omega^2\right)y(-\omega)-\frac{q}{\omega}y-\frac{q}{\omega}(-\omega)\right\}\\
&=\lambda\left\{+y^4-\omega y^3+\omega y^3-\omega^2y^2+\left(p+\omega^2\right)y^2-\omega\left(p+\omega^2\right)y-\frac{q}{\omega}y+q\right\}\\
&=\lambda\left\{+y^4-\omega y^3+\omega y^3-\omega^2y^2+py^2+\omega^2y^2-\omega\left(py+\omega^2y\right)-\frac{q}{\omega}y+q\right\}\\
&=\lambda\left\{+y^4-\omega y^3+\omega y^3-\omega^2y^2+py^2+\omega^2y^2-\left(\omega py+\omega^3y\right)-\frac{q}{\omega}y+q\right\}\\
&=\lambda\left\{+y^4+\left(\omega y^3-\omega y^3\right)+\left(py^2+\omega^2y^2-\omega^2y^2\right)-\omega^3y-\omega py-\frac{q}{\omega}y+q\right\}\\
&=\lambda\left\{y^4+\overbrace{(\omega-\omega)}^{0}y^3+\left[p+\overbrace{\left(\omega^2-\omega^2\right)}^{0}\right]y^2+\left(-\omega^3-\omega p-\frac{q}{\omega}\right)y+q\right\}
\end{aligned}$$

[N.69]

Enfim —

$$\xi^*(y)=\lambda\left\{y^4+py^2+\left(-\omega^3-\omega p-\frac{q}{\omega}\right)y+q\right\}$$

[N.70]

Donde pelo princípio da identidade polinomial entre **N.70** e a forma polinomial da função $\xi(y)$ constituímos o sistema de equações L dado por —

$$L = \begin{bmatrix} 1 = 1 & \langle i \rangle \\ p = p & \langle ii \rangle \\ -\omega^3 - \omega p - \dfrac{q}{\omega} = -r & \langle iii \rangle \\ q = q & \langle vi \rangle \end{bmatrix} \qquad \textbf{[N.71]}$$

Donde da equação $\langle i \rangle$ do sistema de equações L definido em **N.71** temos —

$$\begin{gathered} -\omega^3 - \omega p - \frac{q}{\omega} = -r \\ \rightarrow \\ (-\omega) \times \left(-\omega^3 - \omega p - \frac{q}{\omega} \right) = (-\omega) \times -r \\ \rightarrow \\ \omega^4 + p\omega^2 + q = \omega r \\ \rightarrow \\ \omega^4 + p\omega^2 - \omega r + q = 0 \\ \therefore \\ \omega = \left\langle \omega^4 + p\omega^2 - \omega r + q \right\rangle \end{gathered} \qquad \textbf{[N.72]}$$

Dado que —

$$\left[\left(P(\omega) = \sum_{i=0}^{\partial P(\omega)} a_i x^i \right) \equiv \left(Q(y) = \sum_{i=0}^{\partial Q(y)} b_i y^i \right) \right] \Leftrightarrow \left\{ \left[\partial = \partial P(\omega) = \partial Q(y) \right] \wedge (a_i = b_i); \forall i \in [0, \partial] \right\}$$

[N.73]

De modo que se $P(\omega) \equiv Q(y)$, então os conjuntos das raízes S_P e S_Q associados, respectivamente, aos polinômios $P(\omega)$ e $Q(y)$ são iguais, ou seja, —

$$\begin{aligned} \left[P(\omega) \equiv Q(y) \right] &\Rightarrow \left\{ \left[S_P = \{ \omega_i \mid P(\omega_i) = 0 \} \right] = \left[S_Q = \{ y_i \mid Q(y_i) = 0 \} \right] \right\} \\ &\Rightarrow \omega = \omega_i = \left\langle \omega^4 + p\omega^2 - r\omega + q, i \right\rangle_{\mho} = \left\langle y^4 + py^2 - ry + q, i \right\rangle_{\mho} \end{aligned} \qquad \textbf{[N.74]}$$

Enfim, dado as condições satisfeitas em **N.71** e **N.74** temos que —

$$\xi^*(y) \sim \xi(y) \qquad \textbf{[N.75]}$$

□

CONCLUSÃO FINAL —

A fatoração da função polinomial —

$$\xi(y)=\lambda\left\{y^4+py^2-ry+q\right\};\lambda,p,q,r\in\mathbb{R};y\in\mathbb{C} \quad \textbf{[N.76]}$$

Para a forma equivalente —

$$\xi^*(y)=\lambda\left\{\left[y^3+\omega y^2+\left(p+\omega^2\right)y-\frac{q}{\omega}\right](y-\omega)\right\};\lambda,p,q,r\in\mathbb{R};y,\omega\in\mathbb{C} \quad \textbf{[N.77]}$$

Defronta com o desafio da resolução de uma equação do quarto grau; <u>donde é necessário o conhecimento de uma raiz</u>; ou seja, ω que é dado por —

$$\omega=\left\langle y^4+py^2-ry+q\right\rangle \quad \textbf{[N.78]}$$

No entanto a fatoração **N.76** → **N.77** é apenas um caso particular do problema da decomposição em múltiplos fatores polinomiais dado por —

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\left\{\prod_{j=1}^{F}\left[\sum_{i=0}^{\partial_j}a_{ji}x^i\right];\sum_{k=1}^{F}\partial_k=\partial P(x)\right\} \quad \textbf{[N.79]}$$

Onde F representa o número de fatores polinomiais e ∂_j o grau maximo do fator polinomial j. De modo que em caso de —

$$\left(\left(F=\partial P(x)\right)\quad\wedge\quad\left(\partial_j=1\,|\sum_{j=1}^{n}\partial_j=\partial P(x)\right)\right) \quad \textbf{[N.80]}$$

Temos —

$$\begin{aligned}P(x)&=\left\{\prod_{j=1}^{\partial P(x)}\left[\sum_{i=0}^{1}a_{ji}x^i\right];\sum_{k=1}^{\partial P(x)}\left(\partial_k=1\right)=\partial P(x)\right\}\\&=\left(a_{10}x^0+a_{11}x^1\right)\left(a_{20}x^0+a_{21}x^1\right)\ldots\left(a_{\partial P(x)0}x^0+a_{\partial P(x)1}x^1\right)\end{aligned} \quad \textbf{[N.81]}$$

De modo que fazendo —

$$a_{j0}=a_i\quad a_{j1}=b_i \quad \textbf{[N.82]}$$

Podemos reescrever conforme —

$$\begin{aligned}P(x)&=\prod_{i=1}^{\partial P(x)}\left(a_ix+b_i\right)\\&=\prod_{i=1}^{\partial P(x)}\frac{1}{a_i}\left(x+a_ib_i\right)\end{aligned} \quad \textbf{[N.83]}$$

Ou ainda —

$$P(x)=\left\{\prod_{i=1}^{\partial P(x)}\frac{1}{a_i}\right\}\left\{\prod_{i=1}^{\partial P(x)}x+a_ib_i\right\} \quad \textbf{[N.84]}$$

E, fazendo —

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^{\partial P(x)}\dfrac{1}{a_i}=\beta\\ a_ib_i=\alpha_i\end{cases} \quad \textbf{[N.85]}$$

Temos finalmente que —

$$P(x)=\beta\left\{\prod_{i=1}^{\partial P(x)}x+\alpha_i\right\} \quad \textbf{[N.86]}$$

Lembrando a fatoração canônica, decorrente do TFA de Gauss temos —

$$P(x)=a_n\left\{\prod_{i=1}^{\partial P(x)}(x-\omega_i)\right\} \quad \textbf{[N.87]}$$

É imediato que —

$$\begin{cases}\beta=a\\ \alpha_i=-\omega_i\end{cases} \quad \textbf{[N.88]}$$

Ou seja, quando $F=\partial P(x)$ e $\partial_j=1|\sum_{j=1}^{n}\partial_j=\partial P(x)$; a decomposição em múltiplos fatores polinomiais dada por **N.79** se reduz ao caso geral da decomposição polinomial conforme Gauss, ou seja —

$$P(x)=\sum_{i=0}^{\partial P(x)}a_ix^i=\left\{\beta\prod_{j=1}^{\partial P(x)}\left(x^1+\alpha_j\right)=a_n\prod_{j=1}^{\partial P(x)}\left(x-\omega_j\right)=a_n\prod_{j=1}^{\partial P(x)}\left(x-\left\langle P(x),j\right\rangle_{\mho}\right)\right\} \quad \textbf{[N.89]}$$

Enfim, um produto de fatores polinomiais do primeiro grau! E, apenas pode ser resolvido, quando **TODAS AS RAÍZES DO POLINÔMIO $P(x)$ SÃO CONHECIDAS**; tornando-se, assim, **O PROBLEMA DA RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE GRAU *N***; donde sabemos pelo legado de Galois, não há caminho algébrico para $n\geq 5$! E, enfim, para ratificar a asserção primeira deste apêndice; há o leitor de compreender que há **DESAFIOS DE FATORAÇÃO DE FUNÇÕES** que se encontram no beiral da impossibilidade; quer queiramos admitir este fato, ou não; para o eterno desespero dos algebristas!

Finis Coronat Opus